Universidad De Atacama

Facultad De Ingeniería / Departamento De Matemática

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD
PAUTA DE CORRECCIÓN PRUEBA 2

Profesor: Hugo S. Salinas. Segundo Semestre 2009

DESARROLLO

1. Un directivo de cierta empresa ha comprobado que los resultados obtenidos en los test de aptitud por los solicitantes de un determinado puesto de trabajo sigue una distribución normal con una desviación estándar de 1.42 puntos. Las calificaciones de nueve test son dadas a continuación: 188, 190, 185, 187, 188, 187, 188, 189, 189.

   a) Calcular un intervalo de confianza del 90 % para la calificación media poblacional del grupo de solicitantes actual.

   Solución

   Primero calculamos la media de los datos:

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{188 + 190 + \ldots + 189 + 189}{9} = 187.9$$

   El intervalo de confianza para la media, con un 90 % de confianza está dado por:

$$\mu \in \left(187.9 \pm 1.645 \frac{1.42}{\sqrt{9}}\right)$$

   Pues al 90 % de confianza, el nivel de significancia es $\alpha = 0.1$, entonces $z_{0.1} = 1.645$, luego:

$$\mu \in (187.12; 188.68)$$

   (**5 ptos.**)

   b) A partir de estos resultados muestrales, una persona calcula para la media poblacional un intervalo de confianza que va desde 187.8 a 188.0 puntos. Calcular el nivel de confiabilidad tomado por la persona.

   Solución

   Tenemos que el intervalo de confianza calculado por la persona es:

$$\mu \in (187.8; 188.00)$$

   Luego debemos resolver:

$$187.9 + z_\alpha \frac{1.42}{\sqrt{9}} = 188 \Longleftrightarrow z_\alpha 1.42 = 0.3 \Longleftrightarrow z_\alpha = 0.21$$

   Por lo tanto $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.5838 \Longleftrightarrow \alpha = 0.8336$. Luego el nivel de confianza tomado por la persona es de un 16.64 %.

   (**5 ptos.**)

c) Suponer ahora que la desviación estándar entregada es poco fiable por lo cual se considera desconocida. En base a esta información volver a responder *a*) y comparar tus resultados con dicha alternativa.

<u>**Solución**</u>

Primero calculamos la varianza de los datos:

$$S^2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{(188-187.9)^2 + (190-187.9)^2 + \ldots + (189-187.9)^2}{9-1} = 2.11$$

Luego $S = \sqrt{2.11} = 1.45$. Entonces:

$$\mu \in \left(187.9 \pm t_{n-1;\,\alpha} \frac{1.45}{\sqrt{9}}\right)$$

Pues al 90 % de confianza, el nivel de significación es $\alpha = 0.1$, entonces $t_{8;\,0.1} = 1.8595$, luego:

$$\mu \in (187.00;\, 188.80)$$

(**5 ptos.**)

d) Calcular un intervalo de confianza del 95 % para la desviación estándar de la distribución de las calificaciones.

El intervalo de confianza para la desviación estándar, con un 95 % de confianza está dado por:

$$\sigma \in \left(\sqrt{\frac{(9-1)(2.11)}{\chi^2_b}};\ \sqrt{\frac{(9-1)(2.11)}{\chi^2_a}}\right)$$

Donde $\chi^2_b = 17.5345$ y $\chi^2_a = 2.1797$. Por lo tanto el intervalo solicitado es:

$$\sigma \in (0.98;\, 2.78)$$

(**5 ptos.**)

e) Calcular el tamaño que debería tener la muestra para obtener un intervalo de confianza al 95 % con una precisión (error) menor de 0.2.

Tenemos que resolver

$$1.96\,\frac{1.42}{\sqrt{n}} < 0.2 \iff \sqrt{n} > \frac{2.7832}{0.2} \iff n > 193.66$$

La muestra debería tener al menos 194 calificaciones.

(**5 ptos.**)

2. La memoria RAM para un computador se puede recibir de dos fabricantes A y B con igual probabilidad. Si la memoria proviene del fabricante A, la probabilidad de que falle antes del tiempo especificado por la garantía es $\mathbb{P}(X \leq 1) = 0.1813$, si la memoria proviene del fabricante B, la probabilidad de que falle antes del tiempo especificado por la garantía es $\mathbb{P}(|Y| < 2)$ donde Y tiene una distribución normal de media 4 y varianza 4.

a) Si el experimento aleatorio consiste en probar una memoria RAM hasta que falle, traducir los datos del enunciado, introduciendo los sucesos convenientes.

<u>Solución</u>

Sean los eventos: A : la memoria proviene del fabricante A, B : la memoria proviene del fabricante B y F : la memoria falla antes del tiempo especificado por la garantía.

De los datos se tiene $\mathbb{P}(F|A) = \mathbb{P}(X \leq 1)$ y $\mathbb{P}(F|B) = \mathbb{P}(|Y| < 2)$. Además se sabe que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0.5$. (**5 ptos.**)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una memoria RAM falle antes del tiempo especificado por la garantía?

<u>Solución</u>

Se pide $\mathbb{P}(F)$. Aplicando la fórmula de la probabilidad total se tiene:

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(F|A) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(F|B)$$

Sea $Z \sim N(0,1)$. Falta calcular $\mathbb{P}(F|B) = \mathbb{P}(|Y| < 2)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|Y| < 2) &= \mathbb{P}(-2 < Y < 2) = \mathbb{P}((-2-4)/2 < Z < (2-4)/2) = \mathbb{P}(-3 < Z < -1) \\
&= \mathbb{P}(1 < Z < 3) = \mathbb{P}(Z < 3) - \mathbb{P}(Z < 1) = 0.9987 - 0.8413 = 0.1574
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{P}(F) = (0.5)(0.1813) + (0.5)(0.1574) = 0.16935$$

(**5 ptos.**)

c) Si se ha observado que la memoria RAM ha fallado, ¿cuál es la probabilidad de que proceda del fabricante A?

<u>Solución</u>

Se pide $\mathbb{P}(A|F)$, por el teorema de Bayes, se obtiene como:

$$\mathbb{P}(A|F) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(F|A)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{(0.5)(0.1813)}{0.16935} = 0.535282$$

(**5 ptos.**)

d) Si se tienen 40 memorias RAM, ¿cuál es la probabilidad de que al menos el 90 % de ellas duren más que el tiempo especificado por la garantía?

<u>Solución</u>

Incorporamos la variable N : número de memorias defectuosas entre las 40.

Se pide $\mathbb{P}(N < 4)$. Estamos ante un experimento simple con una situación dicotómica que repetimos 40 veces. Por lo tanto, N sigue una distribución Binomial de parámetros $n = 40$ y $p = \mathbb{P}(F) = 0.16935$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N < 4) &= \mathbb{P}(N=0) + \mathbb{P}(N=1) + \mathbb{P}(N=2) + \mathbb{P}(N=3) \\
&= \binom{40}{0}(0.1694)^0(0.8306)^{40} + \binom{40}{1}(0.1694)^1(0.8306)^{39} \\
&+ \binom{40}{2}(0.1694)^2(0.8306)^{38} + \binom{40}{3}(0.1694)^3(0.8306)^{37} \\
&= 0.07482
\end{aligned}$$

(**5 ptos.**)

3. El nivel de llenado de unas botellas de bebidas gaseosas tiene una distribución normal con media 2 litros y desviación estándar 0.06 litros. Las botellas que contienen menos de 95 % del contenido neto anunciado pueden causar una multa al fabricante por parte del Servicio Nacional del Consumidor (SERNAC), mientras que las botellas que tienen un contenido neto mayor que 2.1 litros pueden provocar un derrame del exceso al abrirlas.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que le pongan una multa al fabricante, si se selecciona al azar una botella de la producción?
   <u>Solución</u>
   Sea X : nivel del llenado de las botellas gaseosas en litros, donde $X \sim N(2, 0.06)$. De acuerdo al enunciado, si las botellas tienen menos del 95 % del contenido neto anunciado (es decir 1.9 litros) pueden causar una multa. Por lo tanto:

   $$\mathbb{P}(X < 1.9) = \mathbb{P}(Z < (1.9-2)/0.06)) = \mathbb{P}(Z < -1.67) = 1-\mathbb{P}(Z < 1.67) = 1-0.9525 = 0.0475$$

   Es decir, hay un 4.75 % de posibilidad que le pongan una multa al fabricante. Donde $Z \sim N(0, 1)$.
   (**5 ptos.**)

   b) ¿Qué proporción de las botellas pueden provocar un derrame al abrirlas?
   <u>Solución</u>
   De acuerdo al enunciado, se pide:

   $$\mathbb{P}(X > 2.1) = \mathbb{P}(Z > (2.1-2)/0.06) = \mathbb{P}(Z > 1.67) = 1-\mathbb{P}(Z < 1.67) = 1-0.9525 = 0.0475$$

   Es decir, aproximadamente 5 de cada 100 botellas pueden provocar derrames al abrirlas.
   (**5 ptos.**)

   c) ¿Qué cantidad mínima de refresco se espera que contenga 99 % de las botellas?
   <u>Solución</u>
   Sea L la cantidad mínima para que las botellas contengan el 99 % de refresco. De acuerdo a esto se necesita resolver:

   $$\mathbb{P}(X > L) = 0.99 \iff \mathbb{P}(Z > (L-2)/0.06) = 0.99 \iff \mathbb{P}(Z < (L-2)/0.06) = 0.01$$

   Por lo tanto:
   $$\frac{L-2}{0.06} = -2.32 \iff L-2 = -0.1392 \iff L = 1.8608$$

   (**5 ptos.**)

   d) En un día se llenan 100 botellas ¿cuál es la probabilidad de que haya en un día más de 4 botellas que puedan provocar un derrame al abrirlas?
   <u>Solución</u>
   Sea Y : número de botellas que, en un día, puedan provocar un derrame al abrirlas de un total de 100. De acuerdo a esto, se trata de una variable aleatoria binomial con $n = 100$ y $p = \mathbb{P}(X > 2.1) = 0.0475$. Se pide calcular:

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > 4) &= 1-\mathbb{P}(Y \leq 4) = 1-\sum_{y=0}^{4}\binom{100}{y}(0.0475)^y(0.9525)^{100-y} \\ &= 1-(0.00770+0.03840+0.09479+0.15442+0.18674) \\ &= 0.51795\end{aligned}$$

   (**5 ptos.**)

e) Utilizando el item anterior, ¿cuál es, en un mes de 30 días, el número medio de días en los que se producen más de 4 botellas que puedan provocar un derrame al abrirlas?
Solución
De acuerdo a la variable aleatoria del item anterior, se trata de calcular el valor esperado. Como se sabe $E(Y) = np$, entonces lo que se pide es $E(Y) = 30 \times 0.51795 = 15.5385$. Por lo tanto, hay 16 días en promedio, en los que se producen más de 4 botellas que puedan provocar un derrame al abrirlas.
(**5 ptos.**)

4. Consideramos una señal de intensidad I, cuya distribución de valores se puede modelizar por una Normal con media μ y desviación estándar σ (ambos desconocidos), pero se sabe que:

$$\mathbb{P}(I < 9) = 0.9772 \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(I > 3) = 0.8413,$$

a) Determinar los parámetros de la distribución de I.
Solución
Se sabe que $I \sim N(\mu, \sigma)$, entonces:

$$\mathbb{P}(Z < (9-\mu)/\sigma) = 0.9772 \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(Z > (3-\mu)/\sigma) = 0.8413,$$

Utilizando una tabla de la Normal estándar se tiene que:

$$\frac{9-\mu}{\sigma} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{3-\mu}{\sigma} = -1,$$

Por lo tanto, los parámetros son $\mu = 5$ y $\sigma = 2$.
(**5 ptos.**)

b) Si, al realizar una emisión, la señal tiene una intensidad menor de 3, se considera de intensidad baja, mientras que si tiene una intensidad mayor de 9, se considera de intensidad alta. Si la intensidad está incluida entre 3 y 9, se considera de intensidad media.

i. Determinar la proporción de emisiones con intensidad de cada tipo.
Solución
La proporción de emisiones de intensidad baja es $\mathbb{P}(I < 3) = 1 - 0.8413 = 0.1587$. De la misma manera, se obtiene la proporción de emisiones de intensidad alta es $\mathbb{P}(I > 9) = 1 - 0.9772 = 0.0228$, mientras que la proporción de emisiones de intensidad media es $\mathbb{P}(3 \leq I \leq 9) = \mathbb{P}(I \leq 9) - \mathbb{P}(I \leq 3) = 0.9772 - 0.1587 = 0.8185$.
(**5 ptos.**)

ii. Si en una sesión, se emiten 20 veces la señal, ¿cuál es la probabilidad de que se observe menos de cuatro veces una señal de intensidad baja?
Solución
Incorporamos la variable X : número de veces que se emite una señal de intensidad baja entre las 20. Se trata de un experimento que consiste en la repetición de 20 veces de un experimento simple con una situación dicotómica, es decir X sigue una distribución Binomial de parámetros $n = 20$ y $p = \mathbb{P}(I < 3) = 0.1587$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < 4) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) \\
&= \binom{20}{0}(0.1587)^0(0.8413)^{20} + \binom{20}{1}(0.1587)^1(0.8413)^{19} \\
&+ \binom{20}{2}(0.1587)^2(0.8413)^{18} + \binom{20}{3}(0.1587)^3(0.8413)^{17} \\
&= 0.6053
\end{aligned}$$

(5 ptos.)

c) Se diseña un sistema de control cuyo objetivo es homogeneizar las emisiones: si la señal es de intensidad baja, el sistema consigue transformarla en una señal de intensidad media en el 50 % de los casos, dejándola de intensidad baja en el resto de los casos. Si la señal es de intensidad alta, consigue rebajar su intensidad a media en el 30 % de los casos, dejándola de intensidad alta en el resto de los casos. Finalmente, si la señal es de intensidad media, el sistema la deja idéntica.

i. Si se emite una señal y se le aplica el control, ¿cuál es la probabilidad de que obtengamos como resultado una señal de intensidad baja?, ¿y de intensidad media?, y de intensidad alta?

Solución
Consideramos los siguientes sucesos:
B : Se emite una señal de intensidad baja
M : Se emite una señal de intensidad media
A : Se emite una señal de intensidad alta
y por otra parte
B_T : La señal transformada es de intensidad baja
M_T : La señal transformada es de intensidad media
A_T : La señal transformada es de intensidad alta
Traduciendo los datos del enunciado, se tiene:

$$\mathbb{P}(B) = 0.1587, \quad \mathbb{P}(M) = 0.8185, \quad \mathbb{P}(A) = 0.0228,$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_T|B) &= 0.5, \quad \mathbb{P}(B_T|M) = 0, \quad \mathbb{P}(B_T|A) = 0,\\
\mathbb{P}(M_T|B) &= 0.5, \quad \mathbb{P}(M_T|M) = 1, \quad \mathbb{P}(M_T|A) = 0.3,\\
\mathbb{P}(A_T|B) &= 0, \quad \mathbb{P}(A_T|M) = 0, \quad \mathbb{P}(A_T|A) = 0.7,
\end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de la probabilidad total, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_T) &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(B_T|B) + \mathbb{P}(M)\mathbb{P}(B_T|M) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B_T|A) = 0.079,\\
\mathbb{P}(M_T) &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(M_T|B) + \mathbb{P}(M)\mathbb{P}(M_T|M) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(M_T|A) = 0.90469,\\
\mathbb{P}(A_T) &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A_T|B) + \mathbb{P}(M)\mathbb{P}(A_T|M) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A_T|A) = 0.016,
\end{aligned}$$

(5 ptos.)

ii. Si se emite una señal y se le aplica el control dos veces consecutivas, ¿cuál es la probabilidad de que obtengamos como resultado una señal de intensidad media?

Solución
Agregamos otro suceso:
M_{TT} : Después de dos transformaciones, la señal es de intensidad media. Basta con repetir los cálculos del item anterior, pero comenzando de B_T, M_T y A_T, y buscando M_{TT}.

$$\mathbb{P}(M_{TT}) = \mathbb{P}(B_T)\mathbb{P}(M_{TT}|B_T) + \mathbb{P}(M_T)\mathbb{P}(M_{TT}|M_T) + \mathbb{P}(A_T)\mathbb{P}(M_{TT}|A_T) = 0.9491,$$

(5 ptos.)

iii. Si se emite una señal y se le ha aplicado el control, resultando la señal transformada de intensidad media, ¿cuál es la probabilidad de que también fuera de intensidad media antes de aplicarle el control?

<u>**Solución**</u>

Se pide calcular $\mathbb{P}(M|M_T)$. Por Teorema de Bayes, se obtiene:

$$\mathbb{P}(M|M_T) = \frac{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}(M_T|M)}{\mathbb{P}(M_T)} = \frac{0.8185 \times 1}{0.90469} = 0.9047$$

(**5 ptos.**)